根据$E=\frac{p^2}{2m}+U(\vec{r})$
两边同时乘以波函数$\Psi(\vec{r},t)$，得到薛定谔方程（Schrödinger equation）：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t)+U(\vec{r})\Psi(\vec{r},t)$$

化成一维：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x,t)+U(x)\Psi(x,t)$$

由于势能与t无关，则转化为定态薛定谔方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+U\Psi(x)=E\Psi(x)$$

根据

$$\begin{cases}U(x)=0, & |x|<a\\ U(x)=\infty, & |x|>a\end{cases}$$

在阱外$(|x|>a)$，定态薛定谔方程是：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi+U_0\psi=E\psi$$

$U_0\to\infty$，根据波函数的连续性和有限性的条件，只有当$\psi=0$时，等式才能成立
在阱内$(|x|<a)$，定态薛定谔方程是：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi=E\psi$$

令$\alpha=(\frac{2mE}{\hbar^2})^{\frac{1}{2}}$，定态薛定谔方程变成了

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\alpha^2\psi=0$$

其解有三种等价的形式：

$$\psi=Asin\alpha x+Bcos\alpha x$$
$$\psi=Ce^{i\alpha x}+C'e^{-i\alpha x}$$
$$\psi=Dsin(\alpha x+\delta)$$

这里选取第一种解，根据ψ的连续性，代入边界条件$\psi(\pm a)=0$

$$Asin\alpha a+Bcos\alpha a=0$$
$$-Asin\alpha a+Bcos\alpha a=0$$

得到

$$Asin\alpha a=0$$
$$Bcos\alpha a=0$$

A, B不能同时为0，否则ψ到处为0，无意义，因此

$$A=0\text{时}，cos\alpha a=0$$
$$B=0\text{时}，sin\alpha a=0$$

可以求得$\alpha a=\frac{n}{2}\pi, n=1,2,3,\cdots$

$$\alpha=\frac{n\pi}{2a}=(\frac{2mE}{\hbar^2})^{\frac{1}{2}}$$

解得体系的能量：

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{8ma^2}, n=1,2,3,\cdots$$

对于第一组解，n为奇数；对于第二组解，n为偶数
第一组解的波函数：

$$\psi_n=\begin{cases}Asin\frac{n\pi}{2a}x, n\text{为正偶数}， & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

另一组解的波函数：

$$\psi_n=\begin{cases}Bcos\frac{n\pi}{2a}x, n\text{为正奇数}， & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

将这两组解合并：

$$\psi_n=\begin{cases}A'sin\frac{n\pi}{2a}(x+a), n\text{为正整数}， & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$$

将波函数进行归一化$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_n|^2dx=\int_{-a}^{a}A'^2sin^2\frac{n\pi}{2a}(x+a)dx=1$

$$\frac{2a}{n\pi}A'^2\int_0^{n\pi}sin^2\frac{n\pi}{2a}(x+a)d[(x+a)\frac{n\pi}{2a}]=1$$

$$\frac{2a}{n\pi}A'^2\int_0^{n\pi}sin^2\theta d\theta=1$$

$sin^2\theta$是周期为π的函数，满足$\int_0^{n\pi}f(x)dx=n\int_0^{\pi}f(x)dx$

$$\frac{2a}{\pi}A'^2\int_0^{\pi}sin^2\theta d\theta=1$$

$$\Longrightarrow\frac{4a}{\pi}A'^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2\theta d\theta=1$$

最终解得

$$A'=\frac{1}{\sqrt{a}}$$